

S.v.p. elke opgave op een apart vel ivm nakijken door verschillende personen!

Vermeld op elk vel je naam en studentnummer.

Dit tentamen bestaat uit 3 opgaven.

Opgave 1. Elektromagnetische golven in een geïoniseerd gas

diëlectrische constante:	$\epsilon_0 = 8.8 \times 10^{-12} \text{ F/m}$
massa van een elektron:	$m_{\text{elektron}} = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$
elementaire lading:	$e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$

We beschouwen een geïoniseerd gas waarin de elektronen met massa m en lading $-e$, beschouwd worden als deeltjes die onder invloed van een uitwendig, elektrisch veld $E = E_0 \cos \omega t$ een harmonische trilling gaan uitvoeren.

De bewegingsvergelijking voor de positie $x = x(t)$ van het elektron is dan:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = (-eE_0/m) \cos \omega t$$

- a) Laat zien dat als de elektron-dichtheid n elektronen/m³ is, de geïnduceerde polarisatie per volume-eenheid van een medium (ook wel dynamische susceptibiliteit genoemd) gegeven wordt door:

$$\chi_e \equiv -\frac{nex}{\epsilon_0 E} = \frac{ne^2}{\epsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

De permitiviteit van een medium wordt gedefinieerd als $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi) = \epsilon_0 \epsilon_r$, waarin ϵ_0 de permitiviteit van het vacuüm is en ϵ_r de relatieve permitiviteit.

De elektron plasma frequentie ω_e wordt gegeven door: $\omega_e^2 \equiv \frac{ne^2}{\epsilon_0 m}$. Voor waarden van $\omega \gg \omega_0$ volgt dan voor de relatieve permitiviteit van een geïoniseerd gas:

$$\epsilon_r = \frac{c^2}{v^2} \approx 1 - \left(\frac{\omega_e}{\omega}\right)^2$$

Hierin is v de fase-snelheid en is c de lichtsnelheid.

- b) Leidt voor deze situatie ($\omega \gg \omega_0$) de dispersie relatie $\omega = \omega(k)$ af.
- c) Laat zien dat voor het geval $\omega \rightarrow \omega_e$ de fase-snelheid groter is dan de lichtsnelheid in vacuüm, maar dat de groepsnelheid juist kleiner is dan de lichtsnelheid in vacuüm.

Elektromagnetische golven kunnen zich alleen door een elektron plasma voortplanten als geldt dat $\omega \geq \omega_e$

- d) Bereken voor een elektron-dichtheid $n = 10^{20}$ vanaf welke golflengte de elektromagnetische golven zich door het plasma kunnen voortplanten.

Opgave 2. Reflectie en transmissie bij geleiders en diëlectrica

diëlectrische constante:	$\epsilon_0 = 8.8 \times 10^{-12} \text{ F/m}$
voor zeewater geldt dat:	$\sigma = 5 \text{ S/m}$
	$\epsilon_r = 81$
	$\mu_r = 1$

Afhankelijk van de frequentie, gedraagt zeewater zich voor elektromagnetische golven soms als een diëlectricum of als een geleider.

Voor de impedantie van geleiders geldt: $Z_C = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\sigma}}$ en voor diëlectrica: $Z_D = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$.

- a) Bereken voor welke frequenties zeewater zich als een geleider gedraagt en voor welke frequenties als een diëlectricum.

$$\text{geleider } \frac{\sigma}{\omega\epsilon} > 100$$

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$$

Een vlakke elektromagnetische golf valt loodrecht in op een grensvlak lucht-zeewater. Neem aan dat de lucht zich gedraagt als vacuüm.

- b) Geef de reflectiecoëfficiënt I_R en de transmissiecoëfficiënt I_T van de golfintensiteit uitgedrukt in de impedanties Z_l (lucht) en Z_w (zeewater) van beide media. (Je hoeft dus geen afleiding te geven.) (NB: $I_R + I_T = 1$).
- c) Laat zien dat als beide media pure diëlectrica zijn, geldt dat de reflectiecoëfficiënt I_R gegeven wordt door:

$$I_R = \left(\frac{1-n}{1+n} \right)^2$$

hierin is n verhouding van de brekingsindexen van beide media.

Bij de overgang van een elektromagnetische golf van vacuüm naar een geleider geldt dat:

$$I_R \approx 1 - 2\sqrt{\frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma}}$$

Twee elektromagnetische golven vallen loodrecht in op het zeewater-oppervlak: groen, zichtbaar licht met een golflengte van 500 nm en een radiogolf met een golflengte van 300 meter.

- d) Bereken voor beide golven de reflectiecoëfficiënt van de intensiteit.

Opgave 3. Buiging en interferentie.

Met behulp van monochromarisch licht met een golflengte $\lambda = 592 \text{ nm}$ worden in twee verschillende situaties interferentie-patternen gemaakt op een scherm. Van beide patronen bepaalt men de intensiteit als functie van de plaats op het scherm; zie figuur 1 en 2. In de ene situatie hebben we te maken met Fresnel-buiging aan één spleet en in de andere situatie met Fraunhofer-interferentie bij meerdere spleten.

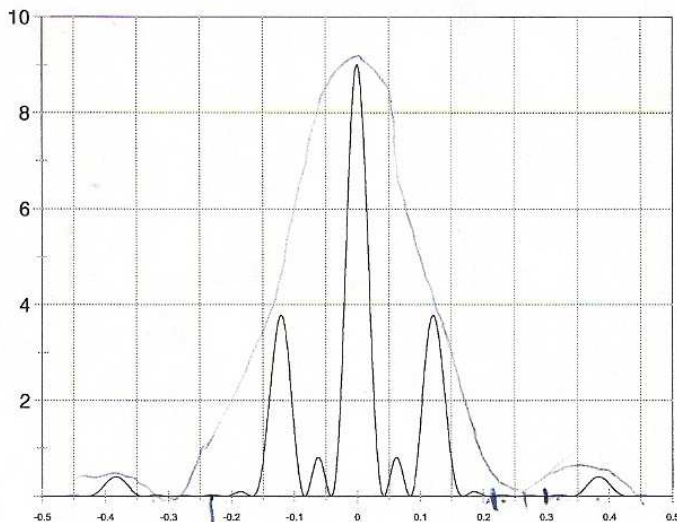
- a) Geef aan welke figuur de Fresnel-buiging laat zien; geef hiervoor de argumenten. fig 1
- b) Bepaal aan de hand van de juiste figuur met hoeveel spleten het Fraunhofer-interferentie patroon gemaakt is; beargumenteer! 3
- c) Bepaal aan de hand van de juiste figuur de verhouding tussen de spleetbreedte en de onderlinge afstand van de spleten in het geval van de Fraunhofer-interferentie. $\frac{1}{2} = \frac{d}{f}$
- d) Bij de Fresnel-buiging is de afstand van de lichtbron tot de spleet $\rho_0 = 0,5 \text{ m}$ en de afstand van de spleet tot het scherm $r_0 = 1,5 \text{ m}$.

De relatie tussen het Cornu-getal w en een positie y in de spleet is:

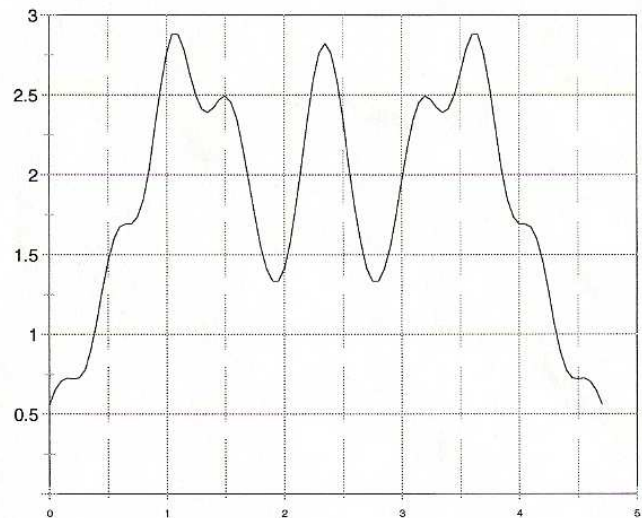
$$w = y \sqrt{\frac{2(\rho_0 + r_0)}{\rho_0 r_0 \lambda}}$$

Bepaal aan de hand van de Cornu-spiraal (zie bijlage op de volgende bladzijde) en de juiste figuur, de breedte van de spleet in het geval van Fresnel-buiging.

$$w = 2,3 \Rightarrow d = 1,5 \text{ mm}$$



Figuur 1.



Figuur 2.

Cornu spiraal

